线性代数行列式复习题

一、填空题：

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\6&8&1&2\\3&9&1&2\\6&2&3&2\end{vmatrix}$，则 $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$______ __0__.

2. 在 5 阶行列式中，项 $a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}a_{53}$ 的符号为___________正号

3. 排列 7623451 的逆序数是_______ __15__.

4. 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 且取负号的项是_______$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

5. 设 $D=\begin{vmatrix}k&3&0\\3&k&0\\4&5&3\end{vmatrix}=0$ 当且仅当 k=__________ ±3_

6. 在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取______正号(填正号或负号)。

二、选择题：

1. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1+a_1&2+a_1&3+a_1\\1+a_2&2+a_2&3+a_2\\1+a_3&2+a_3&3+a_3\end{vmatrix}$ 的值为（ A ）.

A、0　　B、1　　C、2　　D、3

2. 若 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix}-2a_{11}&-2a_{12}&-2a_{13}\\-2a_{21}&-2a_{22}&-2a_{23}\\-2a_{31}&-2a_{32}&-2a_{33}\end{vmatrix}=$（ B ）

（A） 8　　（B）-16　　（C） 16　　（D） 0

3. 当(C)时，齐次线性方程组 $\begin{cases}kx+z=0\\2x+ky+z=0\\kx-2y+z=0\end{cases}$，仅有零解

(A) $k\neq 0$　　(B) $k\neq -1$　　(C) $k\neq 2$　　(D) $k\neq -2$

4. 当(　　　　　)时，齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$，有非零解

(A) 1 或 2　　(B) －1 或－2　　(C) 1 或－2　　(D) －1 或 2

5. 下列行列式计算正确的是：（A ）

A、$\begin{vmatrix}0 & 1 & 4\\-1 & 0 & 3\\-4 & -3 & 0\end{vmatrix}=0$　　B、$\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1 & -1\\-1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=16$

C、$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1 & 1\\-1 & -1 & 0 & 1\\-1 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0$　　D、$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\-5 & 0 & 2 & 0\\7 & 3 & 0 & 0\\4 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=-24$

6. 若$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$，则$\begin{vmatrix}4a_{11} & 2a_{11}-a_{12} & a_{13}\\4a_{21} & 2a_{21}-a_{22} & a_{23}\\4a_{31} & 2a_{31}-a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$（D ）

A、0　　B、4　　C、1　　D、-2

7. 设$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\7 & 8 & 1 & 2\\3 & -9 & 3 & 2\\5 & 2 & 3 & 2\end{vmatrix}$，则$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$(C)。

A、1　　B、-1　　C、0　　D、2

8. 设$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$，则$D_n=$(B)

A、1　　B、$n+1$　　C、$n-1$　　D、-1

9. 设$\tau(.....)$ 表示排列的逆序数，则$\tau(431625)=$(B)

（A）1　　（B) 7　　（C)3　　(D) 2

三、计算题：

1.. 求阶 n 行列式 D=$\begin{vmatrix} 0 & x & \dots & x \\ x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & x & \dots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (n-1)x & (n-1)x & \cdots & (n-1)x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)x\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)x^n$$

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

原式$=\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & y & 1-y \end{vmatrix}=x^2y^2$

3.. 问当 k 取何值时，$Ax=b$ 无解、有唯一解或有无穷多解？当有无穷多解时写出 $Ax=b$ 的全部解$\begin{cases} 2x_1+kx_2-x_3=1, \\ kx_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1. \end{cases}$

解 1　作方程组的增广矩阵（A⋮b），并对它施以初等变换：

$$\left(\overline{A}\right)=\left(A\mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -1 & 1 \\ k & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -1 & 1 \\ k+2 & k-1 & 0 & 3 \\ -6 & 5-5k & 0 & -6 \end{array}\right)\xrightarrow[\text{再}-r_3]{r_3-5r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & -1 & 1 \\ k+2 & k-1 & 0 & 3 \\ 5k+4 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right)$$

于是，　（4 分）

当 $k=-\dfrac{4}{5}$ 时，原方程组无解；

当$k\neq 1,k\neq -\frac{4}{5}$时，原方程组有唯一解；

当$k=1$时，原方程组有无穷多组解，其全部解为$x_1=1,x_2=-1+k,x_3=k$（其中k为任意常数），（或$(x_1\quad x_2\quad x_3)^T=k(0\quad 1\quad 1)^T+(1\quad -1\quad 0)^T$（$k$为任意常数）．（9分）

解2

$$D=\begin{vmatrix}2&k&-1\\k&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}\begin{vmatrix}2&k-1&-1\\k&0&1\\4&0&-5\end{vmatrix}=-(k-1)\begin{vmatrix}k&1\\4&-5\end{vmatrix}=-(k-1)(-5k-4)=(k-1)(5k+4),$$

当$k\neq 1,k\neq -\frac{4}{5}$时，方程组有唯一解.

当$k=1$时，原方程组为$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$；

$$(\overline{A})=(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\2&1&-1&1\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&3&-3&-3\\0&9&-9&-9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{再}r_3-9r_2]{r_2/3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$，同 解 方 程 组 为$\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1+k\\x_3=k\end{cases}$，即

$$(x_1\quad x_2\quad x_3)^T=k(0\quad 1\quad 1)^T+(1\quad -1\quad 0)^T$$（k为任意常数）.

当$k=-\frac{4}{5}$时，原方程组为$\begin{cases}2x_1-\frac{4}{5}x_2-x_3=1\\-\frac{4}{5}x_1-x_2+x_3=2\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$，即$\begin{cases}10x_1-4x_2-5x_3=5\\4x_1+5x_2-5x_3=-10\\4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$，这时第二个第三个方程左边相同，而右边不等，故方程组无解.

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

.解 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 99 & 201 & 297 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

原式$\underline{\underline{r_2-100r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad =6-15-24-12+15+12=-18$

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \\ 25 & 9 & 1 & 4 \\ -125 & 27 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

解：（允许多种方法解答）该行列式为范德蒙行列式

原式=$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 1 & 4 \\ -8 & 27 & 1 & 8 \end{vmatrix}=(3+5)(1+5)(2+5)(1-3)(2-3)(2-1)$

$=672$

7.. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 9 & 1 & 4 \\ 8 & -27 & 1 & -8 \end{vmatrix}$

解：（允许多种方法解答）该行列式为范德蒙行列式

原式$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1 & 3\\ 4 & 9 & 1 & 9\\ 8 & -27 & 1 & 27\end{vmatrix}=(-3-2)(1-2)(3-2)(1+3)(3+3)(3-1)=240$

8．计算四阶行列式 $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$ 的值。

原 式 $\overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=}\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1\\ 6 & 3 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 3 & 1\\ 6 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\overset{\text{第1列提出公因子6}}{=}6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

$\underset{\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}}{\overset{r_2-r_1}{=\!=}}6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$ ＝48

9. 计算五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4 & 5 & 0\\ 6 & 0 & 1 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 9 & 10 & 11 & 1\end{vmatrix}$

解:

方法有多种, 最简单的是按行（或列）展开, 若方法正确，给 4 分，结果正确再给 4 分

$D_5\ \underline{\underline{\text{按}c_5\text{展开}}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 5\\ 6 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\ \underline{\underline{\text{按}r_4\text{展开}}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$\underline{\underline{\text{按}r_1\text{展开}}}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$