第一章　行列式

习 题 一

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

解:

(1)原式 $=1\times(-2)\times(-5)+2\times(-1)\times(-3)+3\times4\times2-3\times(-2)\times(-3)-2\times2\times(-5)-1\times4\times(-1)$

$=10+6+24-18+20+4=46$;

(2)原式 $=2\times1\times5+(-1)\times4\times3+(-1)\times(-7)\times1-(-1)\times1\times3-(-1)\times1\times5-2\times(-7)\times4$

$=10-12+7+3+5+56=69$;

(3)原式 $=2\times1\times5+(-1)\times4\times(-1)+(-1)\times(-7)\times0-(-1)\times1\times(-1)-(-1)\times0\times5-2\times(-7)\times4$

$=10+4+0-1+0+56=69$;

(4)原式 $=2\times(-2)\times3+3\times1\times3+(-5)\times1\times1-(-5)\times(-2)\times3-3\times1\times3-2\times1\times1$

$=-12+9-5-30-9-2=-49$.

2. 求下列排列的逆序数:

(1)　3 2 1 4 5;　　(2)　3 4 1 2 5;

(3)　1 2 3 4 5 6;　　(4)　6 5 3 4 1 2;

(5)　$n\cdots 2\ 1$;　　(6)　$1\ 3\cdots(2n-1)\ 2\ 4\cdots(2n)$.

解:

（1） 逆序数=0+1+2+0+0=3；

（2） 逆序数=0+0+2+2+0=4；

（3） 逆序数=0；

（4） 逆序数=0+1+2+2+4+4=13；

（5） 逆序数=0+1+2+3+…+(n-1)= $\dfrac{n(n-1)}{2}$；

（6） 逆序数=$\dfrac{n(n-1)}{2}$；

因为　　3 2　(1 个)

5 2, 5 4　(2 个)

7 2, 7 4, 7 6　(3 个)

. . . . . .

$(2n-1)2, (2n-1)4, (2n-1)6, \cdots, (2n-1)(2n-2)$　($n-1$ 个)

3. 分别写出四阶和五阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{23}$ 的项.

解：

（1）因为展开式每项除符号外都是取自不同行不同列的三个元素的乘积，其中第一个下标排成标准次序 1234，第二个下标排成 2314 或 2341，其中偶排列（2314）取正号，奇排列（2341）取负号，所以四阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{23}$ 的项为：

$$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44};-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}.$$

（2）因为展开式每项除符号外都是取自不同行不同列的三个元素的乘积，其中第一个下标排成标准次序 12345，第二个下标排成 23145，23154，23415,23451,23514,23541 其中偶排列（23145,23451,23514）取正号，奇排列（23154，23415，23541）取负号，所以五阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{23}$ 的项为：

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}a_{55}; -a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54};$

$a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}; -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55};$

$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}; -a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51};$

4. 利用行列式的性质计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & x & \dots & x \\ x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} (n \geq 2)$; (7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

解:

(1) $$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2+2r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+4r_2}{\overset{r_3+8r_2}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 58 & 62 \\ 0 & 0 & 30 & 37 \end{vmatrix} \overset{r_4-\frac{30}{58}r_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 58 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{143}{29} \end{vmatrix}$$

$$= -[1\times(-1)\times 58\times\frac{143}{29}] = 286;$$

(2) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_1+\sum_{i=2}^{4} r_i}{=} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{i=2,3,4}{\overset{r_i-r_1}{=}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6\times(1\times 2\times 2\times 2) = 48;$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$= adfbce\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=} -adfbce\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+r_1}{=}} -adfbce\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2\leftrightarrow c_3}{=} adfbce\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_3+r_2}{=} adfbce\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4abcdef;$$

(4)

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{i=2,3,\ldots,n}{\overset{r_1+r_i}{=}} \begin{vmatrix} (n-1)x & (n-1)x & \cdots & (n-1)x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)x\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i - x r_1}{\underset{i=2,3,\ldots,n}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)x^n;$$

(5) 从第 4 行开始，后行减前行得，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}}{\underset{r_2-r_1}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{\underset{r_3-r_2}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \overset{r_4-r_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4;$$

(6) $$\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} \overset{c_i-c_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & n-1 \\ a_2+1 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n+1 & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1-a_2, & n=2, \\ 0, & n>2. \end{cases}$$

(7) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_4-a^2r_3 \\ r_3-ar_2}}{\underset{r_2-ar_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-b(b+a)r_2}{\underset{r_2-br_1}{=}}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b)(c+b+a) & d(d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b)(c+b+a) & d(d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(c+b+a) & d(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)[d(d+b+a)-c(c+b+a)]$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

5. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$;

(2) $D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$（$\alpha\neq\beta$）.

证明:

(1) 左边$=\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}\overset{c_2-c_1}{=}\begin{vmatrix} a+b & c-a & c+a \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$

$$\overset{c_3+c_2}{=}\begin{vmatrix} a+b & c-a & 2c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & 2c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & 2c_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a+b & c-a & c \\ a_1+b_1 & c_1-a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2-a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2-c_3}{=}2\begin{vmatrix} a+b & -a & c \\ a_1+b_1 & -a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & -a_2 & c_2 \end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=}2\begin{vmatrix} b & -a & c \\ b_1 & -a_1 & c_1 \\ b_2 & -a_2 & c_2 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} b & a & c \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=}2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(2) 将 D_n 按第一列展开后，再将展开后的第二项按第一行展开，则：

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}(\alpha+\beta)D_{n-1}+1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}\alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-(-1)^{1+1}\alpha\beta D_{n-2}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

以下用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，$D_1=\alpha+\beta$ 显然成立；假设对于小于 n 的自然数原式成立，则由递推关系知，

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

故对一切自然数 n，原式都成立.

6. 计算下列行列式:

(1) $D_n=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$;

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, (i=1,2,\cdots n);$$

(3) $$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix};$$

(4) $$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix};$$

(5) $$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x_n \end{vmatrix}, (x_i \neq a_i, i=1,\cdots,n);$$

(6) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

解：

(1) 按第 n 行展开后，再将展开后的第一项按第一行展开，则：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{n+n} \cdot a \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)(n-2)} + a^n = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1).$$

(2) 第 i 列提取公因子 a_i $(i = 1, 2, \cdots n)$，再将各列都加到第一列，得：

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{b_n}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{b_n}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开得：$D_n=\prod_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$.

（3）按第一行展开后得：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=aD_n+xD_n=(a+x)D_n=(a+x)(a+x)D_{n-1}$$

$$=(a+x)^{n-1}D_2=(a+x)^nD_1=a(a+x)^n.$$

(4) 按第一行展开后，再将第一项和第二项按 $2n$-1 行展开得：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n &&&&& b_n \\ & \ddots &&& \iddots & \\ && a_1 & b_1 && \\ && c_1 & d_1 && \\ & \iddots &&& \ddots & \\ c_n &&&&& d_n \end{vmatrix}$$

$$=a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} &&&&& b_{n-1} & \\ & \ddots &&& \iddots && \vdots \\ && a_1 & b_1 &&& \\ &&&&&& \vdots \\ && c_1 & d_1 &&& \\ & \iddots &&& \ddots && \vdots \\ c_{n-1} &&&&& d_{n-1} & \\ &&& \cdots &&& d_n \end{vmatrix}$$

$$+b_n\times(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} &&&&& b_{n-1} \\ \vdots &&&&&& \\ && \ddots &&& \iddots & \\ \vdots &&& a_1 & b_1 && \\ \vdots &&& c_1 & d_1 && \\ && \iddots &&& \ddots & \\ 0 & c_{n-1} &&&&& d_{n-1} \\ c_n & 0 &&& \cdots && 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_nd_nD_{2(n-1)}-b_nc_nD_{2(n-1)}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)},$$

以此作递推公式，得：

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \\
&= (a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) D_{2(n-2)} \\
&= \cdots\cdots \\
&= (a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) \cdots (a_2 d_2 - b_2 c_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_n d_n - b_n c_n)(a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i).
\end{aligned}
$$

其中记号“ $\prod$ ”表示所有同类型因子的连乘积.

(5) 先将各列都减去第一列，再第 i 列提取公因子 $x_i - a_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，然后将各列都加到第一列，得：

$$
D_n = \begin{vmatrix}
x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_{n-1} & a_n \\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x_n
\end{vmatrix}
\overset{r_i - r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}}
\begin{vmatrix}
x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_1 - x_1 & 0 & \cdots & x_n - a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{x_k-a_k} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x_k-a_k})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i).
$$

(6) 将 D_n 中增加一行、增加一列，变成 $n+1$ 阶范德蒙德行列式的转置行列式，

即取
$$
D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-2} & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix}
$$

于是有

$$
D_{n+1}=D^T{}_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)
$$

$$
=(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)
$$

$$
=\left[y^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n\right].\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)
$$

若把 D_{n+1} 按最后一行展开，得

$$D_{n+1} = a_n y^n + y^{n-1}(-1)^{n+1+n} D_n + \cdots + a_0$$
$$= a_n y^n + (-D_n) y^{n-1} + \cdots + a_0 ,$$

即 y^{n-1} 的系数恰好是$(-D_n)$.比较上式两边 y^{n-1} 的系数，有：

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j) = (-D_n)$$

便得：

$$D_n = (\sum_{i=1}^{n} x_i) \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j).$$

7. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$,求 $A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42}$.

解:

计算 $A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42}$, 相当于用各代数余子式前的系数 1 替换行列式 D 中的第 2 列后进行展开, 即

$$A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42} = 1 \times A_{12} + 1 \times A_{22} + 1 \times A_{32} + 1 \times A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

8. 利用克拉默法则求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 2, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

解：

(1)由于系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&-2&1\\1&1&0&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&2&-3&-1\\0&2&-1&-1\\0&1&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-3&-1\\2&-1&-1\\1&0&-3\end{vmatrix}\overset{c_3+3c_1}{=}\begin{vmatrix}2&-3&5\\2&-1&5\\1&0&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&5\\-1&5\end{vmatrix}$$

$$=(-3)\times5-5\times(-1)=-10\neq0$$

所以方程组有唯一解.而：

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&-2&1\\2&1&0&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&2&-3&-1\\0&3&-2&-3\\0&1&0&-3\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-3&-1\\3&-2&-3\\1&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=12+9+0-2-27+0=-8$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&-2&1\\1&2&0&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&2\\0&0&-3&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-3&-1\\1&-1&-1\\0&0&-3\end{vmatrix},$$

$$=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&-1\\0&-3\end{vmatrix}=-(-3)\times(-3)=-9$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&2&0&-1\\0&2&1&-1\\0&1&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&-1\\2&1&-1\\1&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&-1\\1&-3\end{vmatrix}=-6+1=-5$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&0&2\\1&0&1&1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}}\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\0&2&-3&0\\0&2&-1&-1\\0&1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-3&0\\2&-1&-1\\1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&0\\-1&-1\end{vmatrix}=-3,$$

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-8}{-10}=\dfrac{4}{5},x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-9}{-10}=\dfrac{9}{10},x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{1}{2},x_4=\dfrac{D_4}{D}=\dfrac{3}{10}.$

(2)由于系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}{\underset{r_4-3r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-2&3\\-5&-3&-7\\-2&-1&8\end{vmatrix}$$

$$=-24-28+15-18-80-7=-142\neq 0$$

所以方程组有唯一解.而：

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3+3r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=}}\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-12&0&-3&2\\13&0&2&-2\\-5&0&1&10\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-12&-3&2\\13&2&-2\\-5&1&10\end{vmatrix}$$

$$=-(-240-30+26+20+390-24)=-142$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-7&-2&3\\0&-12&-3&-7\\0&-15&-1&8\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-7&-2&3\\-12&-3&-7\\-15&-1&8\end{vmatrix}$$

$$=168-210+36-135-192+49=-284$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&1&5&1\\0&1&-7&3\\0&-5&-12&-7\\0&-2&-15&8\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-7&3\\-5&-12&-7\\-2&-15&8\end{vmatrix}$$

$$=-96-98+225-72-280-105=-426$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1\\r_4-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&1&-2&-7\\0&-5&-3&-12\\0&-2&-1&-15\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-2&-7\\-5&-3&-12\\-2&-1&-15\end{vmatrix}.$$

$$=45-48-35+42+150-12=142$$

故$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-142}{-142}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-284}{-142}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-426}{-142}=3$, $x_4=\dfrac{D_4}{D}=\dfrac{142}{-142}=-1.$