习题二

1. 有 6 名选手参加乒乓球比赛，成绩如下：选手 1 胜选手 2，4，5，6，负于 3；选手 2 胜 4，5，6，负于 1，3；选手 3 胜 1，2，4，负于 5，6；选手 4 胜 5，6，负于 1，2，3；选手 5 胜 3，6，负于 1，2，4；若胜一场得 1 分，负一场得 0 分，试用矩阵表示输赢状况，并排序。

解 $$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \end{array}$$ 选手按胜多负少排序为 1 2 3 4 5 6.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} u & v \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & y \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，求 x,y,u,v 的值.

解 $\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 即

左边

$$=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u & v \\ 8 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x\text{+3u-6} & 0+3v+4 \\ 0+24-2x & y+9-2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3u-6 & 3v+4 \\ 24-2x & 9-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这时，$x=12, y=9, u=-2, v=-\dfrac{4}{3}$

3. 计算下列矩阵的乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$；

解 $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

（4） $(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$；

解 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

(5) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

；

解 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$

(6) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

解

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}{x_1}^2+a_{22}{x_2}^2+a_{33}{x_3}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$.

解 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$$=3\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}.$$

5. 已知两个线性变换：$\begin{cases}x_1=y_1+y_2+y_3\\x_2=y_1+y_2-y_3\\x_3=y_1-y_2+y_3\end{cases}$，$\begin{cases}y_1=z_1+2z_2+3z_3\\y_2=-z_1-2z_2+4z_3\\y_3=5z_2+z_3\end{cases}$，

求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

解 由已知

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\\boldsymbol{y}_2\\\boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_1\\\boldsymbol{z}_2\\\boldsymbol{z}_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix},$$

所以有$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=5\boldsymbol{z}_2+8\boldsymbol{z}_3\\\boldsymbol{x}_2=-5\boldsymbol{z}_2+6\boldsymbol{z}_3\\\boldsymbol{x}_3=2\boldsymbol{z}_1+9\boldsymbol{z}_2\end{cases}$.

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$, 问

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗?

(1)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗?

解 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

因为$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗?

解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

因为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\14&29\end{pmatrix},$$

但 $$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix},$$

所以$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

(3)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗?

解 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

因为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix},$$

而 $$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 4 & 11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 7\end{pmatrix},$$

故$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

7. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 0\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3\text{L}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$.

解 $$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\lambda & 1\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots$,

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \boldsymbol{k}\lambda & 1\end{pmatrix}.$$

8.设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3\text{L}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$.

解 首先观察

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^3\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2\\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^4\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3\\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4\\ 0 & 0 & \lambda^5\end{pmatrix},$$

$\cdots\cdots$,

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

当 $\boldsymbol{k}$=2 时，显然成立.

假设 k 时成立，则 $\boldsymbol{k}$+1 时，

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^{k}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda^{k} & \boldsymbol{k}\lambda^{k-1} & \dfrac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^{k} & \boldsymbol{k}\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1} & \dfrac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix},$$

由数学归纳法原理知:

$$\boldsymbol{A}^{k}=\begin{pmatrix}\lambda^{k} & \boldsymbol{k}\lambda^{k-1} & \dfrac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^{k} & \boldsymbol{k}\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{k}\end{pmatrix}.$$

9. 证明题：

(1) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 充分性: 因为 $\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^{T}=\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 所以

$(\boldsymbol{AB})^{T}=(\boldsymbol{BA})^{T}=\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{B}^{T}=\boldsymbol{AB}$,

即 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

必要性：设 $\boldsymbol{AB}$ 是对称阵，则

$\boldsymbol{AB}=\left(\boldsymbol{AB}\right)^{T}=\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{BA}\therefore\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

(2)若 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵， $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵.

证明 因为$\left(\boldsymbol{A}^{2}\right)^{T}=\left(\boldsymbol{AA}\right)^{T}=\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A}^{T}=\left(-\boldsymbol{A}\right)\left(-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{A}^{2}$,

$$\left(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\right)^{T}=\left(\boldsymbol{AB}\right)^{T}-\left(\boldsymbol{BA}\right)^{T}=\mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}-\mathbf{A}^{T}\mathbf{B}^{T}=\boldsymbol{B}\left(-\boldsymbol{A}\right)-\left(-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$$

所以 $\boldsymbol{A}^{2}$ 是对称矩阵， $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 也是对称矩阵。

10. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

解 $|A|=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$，$A^*=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$;

解　经计算$|A|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1\neq 0$，知 A 可逆，且

$A_{11}=\cos\theta, A_{21}=\sin\theta, A_{12}=-\sin\theta, A_{22}=\cos\theta$

故 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

解 $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9}\end{array}\right)$$

故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9}\end{pmatrix}$$

11. 解下列矩阵方程

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$;

解 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ 先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，再和矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ 相乘

因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，

且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

解　方法一： 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，再和矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相乘

因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

方法二：

$(A \,\vdots\, B)$（下一步 r_1 与 r_3 调换）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1\end{array}\right)$$（下一步 r_1-r_2，r_3-r_1）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1\end{array}\right)$$（下一步 r_3+2r_2，$-1r_2$）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5\end{array}\right)$$（下一步 r_2+r_3，$r_1 1r_3$）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & -4 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5\end{array}\right)$$

(3) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$；

解　记 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$

因为 $|A|,|B|$ 不为 0，所以 A,B 可逆

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

所以 $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

(4) $AX+I=A^2+X$. 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

解　由 $AB+I=A^2+B$ 得

$(A-I)B=A^2-I$,

即　$(A-I)B=(A-I)(A+I)$.

因为$|A-I|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以$(A-I)$可逆，从而

$$B=A+I=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

12. 若$A^k=0$，试证：$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$

证明一 因为$A^k=O$，所以$I-A^k=I$. 又因为

$$I-A^k=(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

所以 $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I,$

由定理 2 推论知$(I-A)$可逆，且

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证明二 一方面，有$I=(I-A)^{-1}(I-A)$.

另一方面，由$A^k=O$，有

$$I=(I-A)+(A-A^2)+A^2-\cdots-A^{k-1}+(A^{k-1}-A^k)$$
$$=(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(I-A),$$

故 $(I-A)^{-1}(I-A)=(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(I-A),$

两端同时右乘$(I-A)^{-1}$，就有

$$(I-A)^{-1}(I-A)=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

13. 设方阵A满足$A^2-A-2I=O$，证明：A及$A+2I$可逆，并求A^{-1}及$(A+2I)^{-1}$。

证明 （1）由$A^2-A-2I=0$，得$A(A-I)=2I$，故$A\left[\frac{1}{2}(A-I)\right]=I$，因此$A$可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I)$，由$\left(-\frac{1}{2}A\right)(I-A)=I$知，$I-A$也可逆，且$(I-A)^{-1}=-\frac{1}{2}A$。

（2）由$A^2-A-2I=O$得 $A^2-A-6I=-4I,$

即$(A+2I)(A-3I)=-4I$，或 $(A+2I)\cdot\frac{1}{4}(3I-A)=I$

由定理 2 推论知($\boldsymbol{A}$+2$\boldsymbol{I}$)可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

14. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$

证明 由 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，从而 $\boldsymbol{A}^*$也可逆.

因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$.

又 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}^{-1}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^*$，所以

$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

15. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，求证 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

证明 由于 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，取行列式得到 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$.

若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

若$|\boldsymbol{A}|=0$，由(1)知$|\boldsymbol{A}^*|=0$，此时命题也成立.

因此$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

16. 若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，已知 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|$

解 因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$

所以 $\left|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^3\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=-\frac{16}{27}$

17. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式的和.

解 利用公式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，先求出 $|\boldsymbol{A}|$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再计算所求和。

显然 $|\boldsymbol{A}|=1$，又

$$(A \mid I)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&\cdots&0&1&&&&\\1&1&0&\cdots&0&&1&&&\\1&1&1&\cdots&0&&&1&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&&&&\ddots&\\1&1&1&\cdots&1&&&&&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&&&&&1&&&&\\&1&&&&-1&1&&&\\&&1&&&&-1&1&&\\&&&\ddots&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&1&&&&-1&1\end{array}\right)$$

可见

$$A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\end{pmatrix}$$

于是 $\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=n-(n-1)=1$

18. 用分块矩阵求矩阵乘积：

(1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&3&0&1\\-3&0&0&0\end{pmatrix}$.

解 记矩阵 $A=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 2&1&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}I_2&0\\A&I_1\end{pmatrix}$， $B=\left(\begin{array}{c|ccc}1&2&1&0\\4&3&0&1\\\hline -3&0&0&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}C&D\\\hline F&O\end{array}\right)$

$$AB=\begin{pmatrix}I_2&0\\A&I_1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}C&D\\\hline F&O\end{array}\right)=\begin{pmatrix}C&D\\AC+F&O\end{pmatrix}$$

由 $AC+F=\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+(-3)=3$，$AD=\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&1\end{pmatrix}$

故得 $AB=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&3&0&1\\3&7&2&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&-1&0&0\\3&1&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&4&2\end{pmatrix}$.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&-1&0&0\\3&1&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&0\\0&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&0\\0&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$,

从而 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&0\\0&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$,

因为 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&4&-3\\3&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&-6\\-8&-4\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&4&0&0\\0&4&-3&0&0\\3&2&3&0&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&-8&-4\end{pmatrix}$

19. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$

解 设 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{C}_3&\boldsymbol{C}_4\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{C}_3&\boldsymbol{C}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{AC}_3&\boldsymbol{AC}_4\\\boldsymbol{BC}_1&\boldsymbol{BC}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_s\end{pmatrix}.$$

由此得 $\begin{cases}\boldsymbol{AC}_3=\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{AC}_4=\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{BC}_1=\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{BC}_2=\boldsymbol{E}_s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{A}^{-1}\\\boldsymbol{C}_4=\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{B}^{-1}\end{cases}$,

所以 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

20. 用分块矩阵求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；

解 令 $\boldsymbol{A}=(5), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

且 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆

原式的逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & 0 \end{pmatrix}$，

由于 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_2^{-1} \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\cdots \end{pmatrix}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n \neq 0.$

解 由于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \\ \boldsymbol{a}_n & 0 & 0 & \cdots & 0\cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & 0 \end{pmatrix}$

，

所以 $\boldsymbol{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A}_2^{-1} \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\boldsymbol{a}_n} \\ \frac{1}{\boldsymbol{a}_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\boldsymbol{a}_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\boldsymbol{a}_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$

21. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；

解 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_2$-3$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3$-$\boldsymbol{r}_1$.）

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_2$+4$\boldsymbol{r}_3$.）

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -13 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$（下一步:$\boldsymbol{r}_3$+$\boldsymbol{r}_2$.）

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -13\\ 0 & 0 & -15\end{pmatrix}$$（下一步: $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3\div$（-15））

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -13\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$（下一步: $\boldsymbol{r}_2+13\boldsymbol{r}_3$，　$\boldsymbol{r}_1+11\boldsymbol{r}_3$）

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 4 & -7 & -1\end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 4 & -7 & -1\end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_2\times2+(-3)\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3+(-2)\boldsymbol{r}_1$.）

$$\sim\begin{pmatrix}0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$$（下一步: $\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_1+3\boldsymbol{r}_2$.）

$$\sim\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$（下一步: $\boldsymbol{r}_1\div2$.）

$$\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -3 & 7\\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -3 & -7\\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3-3\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_4-2\boldsymbol{r}_2$.）

$$\sim\begin{pmatrix}0&-1&1&1&1\\1&2&0&-2&-4\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}$$（下一步：r_2+2r_1, r_3-8r_1, r_4-7r_1.）

$$\sim\begin{pmatrix}0&-1&1&1&1\\1&0&2&0&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}$$（下一步：$r_1\leftrightarrow r_2$, $r_2\times(-1)$, r_4-r_3.）

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$（下一步：r_2+r_3.）

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

22. 设$A=\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}$，求一个可逆矩阵$P$，使$PA$为行最简形矩阵

解 $(A\,\vdots\, I)=\left(\begin{array}{cccc:ccc}0&2&-3&1&1&0&0\\0&3&-4&3&0&1&0\\0&4&-7&-1&0&0&1\end{array}\right)$（下一步 $r_1\times0.5$）

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:ccc}0&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&3&-4&3&0&1&0\\0&4&-7&-1&0&0&1\end{array}\right)$$（下一步 r_2-3r_1，r_3-4r_1）

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:ccc}0&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&1&0\\0&0&-1&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$（下一步 $r_2\times2$）

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$（下一步 $\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_2$）

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 5 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

故 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. 用初等变换求矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；

解法一 因为

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$（下一步 $\boldsymbol{r}_2$-2$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_3$-3$\boldsymbol{r}_1$）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$（下一步 $\boldsymbol{r}_3$-$\boldsymbol{r}_2$）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$（下一步 $\boldsymbol{r}_1$+3$\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_2$+5$\boldsymbol{r}_3$）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$（下一步 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$）

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$（下一步 $\boldsymbol{r}_2\times-2$，$\boldsymbol{r}_3\times-1$）

$$:\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\dfrac{3}{2} & -3 & \dfrac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

解:

因为 $r(A)=3\neq 0$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 利用矩阵的初等行变换法求 A^{-1},

$$(\boldsymbol{A}\mathrm{M}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 1 & -3 & 11 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{M} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -20 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（下一步 $\boldsymbol{r}_3\times(-3)$，$\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 与 $\boldsymbol{r}_4$ 对调，）

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$（下一步 r_4-2r_2，r_3-4r_2）

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}$$（下一步 r_4+2r_3）

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$$（下一步 r_3-r_4，r_2-2r_3，r_2-r_4，r_1+3r_3，r_1+2r_4）

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-1&-1&-2&-2\\0&1&0&0&0&1`&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$$（下一步 r_1+2r_2）

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$$

故逆矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$.

24. 解下列矩阵方程

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$，.

解 因为

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$.

(2) $XA=B$ 其中 $A=\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}$.

$$X=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{19}&-\frac{1}{19}&-\frac{3}{19}\\\frac{9}{19}&\frac{10}{19}&\frac{11}{19}\\-\frac{13}{19}&-\frac{25}{19}&-\frac{18}{19}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

(3)设 $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$，求 X 使 $XA=B$.

解　考虑 $A^TX^T=B^T$. 因为

$$(A^T,\ B^T)=\begin{pmatrix}0&2&-3&1&2\\2&-1&3&2&-3\\1&3&-4&3&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-4\\0&1&0&-1&7\\0&0&1&-1&4\end{pmatrix},$$

所以　$X^T=(A^T)^{-1}B^T=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&7\\-1&4\end{pmatrix}$,

从而　$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

(4) $AX+B=X$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$

解：　$X=(I-A)^{-1}\cdot B$，　由 $|I-A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=3\neq 0$

$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$　　　$X=(I-A)^{-1}\cdot B$

从而 $X=\begin{pmatrix}9&-3\\6&0\\3&-3\end{pmatrix}$

25. 求作一个秩是 4 的方阵，它的两个行向量是$(1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0)$，$(2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$.

解 用已知向量容易构成一个有 4 个非零行的 5 阶下三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此矩阵的秩为 4, 其第 2 行和第 3 行是已知向量.

26. 用初等变换求下列矩阵的秩，并求一个最高阶非零子式.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_1\leftrightarrow\boldsymbol{r}_2$.）

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_2-3\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$.）

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$（下一步: $\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2$.）

$\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩为2, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4$是一个最高阶非零子式.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$;

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$(下一步: $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_2-2\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3-7\boldsymbol{r}_1$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix}$(下一步: $\boldsymbol{r}_3-3\boldsymbol{r}_2$.)

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

矩阵的秩是 2, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7$ 是一个最高阶非零子式.

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

解 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$（下一步 r_1 与 r_4 对调，$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4$，$\boldsymbol{r}_3-2\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_4-3\boldsymbol{r}_1$）

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$（下一步 $\boldsymbol{r}_3-3\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4-4\boldsymbol{r}_2$）

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$（下一步 $\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_3$）

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

矩阵的秩是 3, $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 40$ 是一个最高阶非零子式.

27. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \lambda \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$，其中 λ 为参数，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

解：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \lambda \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & \lambda+3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & \lambda+3 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$（第一步：$r_2-3r_1$，$r_3-5r_1$ 第二步：r_3-r_1）

故当 $\lambda = 5$ 时, $\boldsymbol{R}(\mathbf{A}) = 2$;故当 $\lambda \neq 5$ 时， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = 3$.

28. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3 & \mu & 6 \end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = 2$，求 λ 与 μ 的值.

解：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3 & \mu & 6 \end{pmatrix} \underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & \mu-5 & -4 \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0 \end{pmatrix}$

因 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = 2$，故 $5-\lambda = 0$， $\mu - 1 = 0$

即 $\lambda = 5$， $\mu = 1$

29. 讨论 **n** 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ $(n \geq 2)$

解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \underset{i=2,3,\cdots,n}{\overset{c_1+c_i}{\sim}} \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \underset{j=2,3,\cdots,n}{\overset{r_j-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

因此当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a} \neq -(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{b}$ 时， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}$ ；当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 0$ 时， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = 0$ ，此时 $\boldsymbol{A} = 0$；当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \neq 0$ 时， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = 1$ ；当 $\boldsymbol{a} \neq -(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{b} \neq 0$ 时， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{n}-1$.