习题三

1.求解下列齐次线性方程组:

$$(1)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

解 (1)对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_4+2r_1}{\overset{\substack{r_3-r_2 \\ r_2-3r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3\times\frac{1}{2} \\ r_4-r_3}}{\overset{\substack{r_1+r_2 \\ r_3-r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_1+3r_3 \\ r_2+4r_3}}{\overset{r_3\times\frac{1}{5}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此行最简形矩阵可知,此方程组的通解为: $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

(2)对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \underset{r_4-2r_1}{\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-4r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\overset{\substack{r_3-3r_2 \\ r_4+r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \underset{r_4-12r_3}{\overset{\substack{r_1-r_2 \\ r_3\times\frac{1}{9}}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2+r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \dfrac{7}{6}x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 - \dfrac{5}{6}x_5 = 0, \\ x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 = 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 + \dfrac{7}{6}x_5, \\ x_2 = x_3 + \dfrac{5}{6}x_5, \\ x_4 = \dfrac{1}{3}x_5. \end{cases}$$

取 x_3, x_5 为自由未知量,令 $x_3 = c_1, x_5 = c_2 (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$,则此方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 + \dfrac{7}{6}c_2, \\ x_2 = c_1 + \dfrac{5}{6}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = \dfrac{1}{3}c_2, \\ x_5 = c_2. \end{cases}$$

方程组的通解的列向量形式为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2.求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2. \end{cases}$

解　(1)对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_2 - 3r_1}{\underset{r_3 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2, \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = 3$, 所以此方程组无解.

(2)对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,有

$$B=\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\\3&8&-1&1&1\\1&-9&3&7&7\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-3r_1\\r_4-r_1}}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&-7&2&4&4\\0&-14&4&8&8\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-2r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_1-5r_2}{\overset{r_2\times\left(-\frac{1}{7}\right)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}&\frac{13}{7}&\frac{13}{7}\\0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{4}{7}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{3}{7}x_3+\dfrac{13}{7}x_4=\dfrac{13}{7},\\x_2-\dfrac{2}{7}x_3-\dfrac{4}{7}x_4=-\dfrac{4}{7}.\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{7}x_3-\dfrac{13}{7}x_4+\dfrac{13}{7},\\x_2=\dfrac{2}{7}x_3+\dfrac{4}{7}x_4-\dfrac{4}{7}.\end{cases}$$

取 x_3,x_4 为自由未知量,令 $x_3=c_1,x_4=c_2\,(c_1,c_2\in\mathbf{R})$,则此方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{7}c_1-\dfrac{13}{7}c_2+\dfrac{13}{7},\\x_2=\dfrac{2}{7}c_1+\dfrac{4}{7}c_2-\dfrac{4}{7},\\x_3=c_1,\\x_4=c_2.\end{cases}$$

方程组的通解的列向量形式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{7}\\\dfrac{2}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\dfrac{13}{7}\\\dfrac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{13}{7}\\-\dfrac{4}{7}\\0\\0\end{pmatrix}$$

(3)对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换，有

$$B=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-3r_1\\r_3-2r_1}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-14&10&-18&10\\0&-7&5&-9&5\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-2r_2}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-7&5&-9&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_1-4r_2}{\overset{r_2\times\left(-\frac{1}{7}\right)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{7}z-\dfrac{1}{7}w=\dfrac{6}{7}, \\ y-\dfrac{5}{7}z+\dfrac{9}{7}w=-\dfrac{5}{7}. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{7}z+\dfrac{1}{7}w+\dfrac{6}{7}, \\ y=\dfrac{5}{7}z-\dfrac{9}{7}w-\dfrac{5}{7}. \end{cases}$$

取z,w为自由未知量,令$z=c_1, w=c_2 (c_1,c_2\in\mathbf{R})$,则此方程组的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{7}c_1+\dfrac{1}{7}c_2+\dfrac{6}{7}, \\ y=\dfrac{5}{7}c_1-\dfrac{9}{7}c_2-\dfrac{5}{7}, \\ z=c_1, \\ w=c_2. \end{cases}$$

方程组的通解的列向量形式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{6}{7} \\ -\dfrac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. 设有线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2, \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1, \end{cases}$$

问:λ取何值时,此方程组有唯一解、无解或有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出方程组的通解.

解 系数行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(10-\lambda)(\lambda-1)^2$,

当$\lambda\neq 10$且$\lambda\neq 1$时,$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,由克莱姆法则可知,此方程组有唯一解;

当$\lambda=10$时,对增广矩阵$\boldsymbol{B}$施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2+4r_1 \\ r_3+r_1}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -18 & -18 & 9 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\times\frac{1}{2}}{\underset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & -9 & -9 & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{2}\end{pmatrix}$$

因为$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2,\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$,所以此线性方程组无解;

当$\lambda=1$时,对增广矩阵$\boldsymbol{B}$施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\underset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=1<3$,故此方程组有无穷多组解.

得与原方程组同解的方程组

$$x_1+2x_2-2x_3=1,\qquad 即\quad x_1=-2x_2+2x_3+1.$$

取x_2,x_3为自由未知量,令$x_2=c_1,x_3=c_2(c_1,c_2\in\mathbf{R})$,则此方程组的通解为

$$x_1=-2c_1+2c_2+1.$$

方程组的通解的列向量形式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

4.已知向量组$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$可由向量组$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

证明:向量组$\boldsymbol{A}$与向量组$\boldsymbol{B}$等价,并求出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$被$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表示的表示式.

证明 只需验证向量组$\boldsymbol{A}$也可由向量组$\boldsymbol{B}$线性表示.由已知,有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

因为$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0$,所以矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$可逆.

故 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3,\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3\right)$$

上式表明:向量组 $\boldsymbol{A}$ 也可由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示.

由此可知: 向量组 $\boldsymbol{A}$ 与向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价,且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_3.$$

5. 已知向量组

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,0,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,-2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(4,4,1,3)^{\mathrm{T}},$$

证明:向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{A}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示.

证明 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,

对矩阵 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ 施行初等行变换,将其化为行阶梯形矩阵

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\2&1&0&1&1&1\\3&2&1&2&1&3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&3&2&2&0&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&2&-8&-1&7&-9\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3-3r_2\\r_4-2r_2}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&20&5&-15&25\\0&0&4&1&-3&5\end{pmatrix}\underset{r_4-5r_3}{\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&-3&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$, 所以向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,将其化为行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-r_1\\r_4-2r_1}}{\overset{\substack{r_1\times\frac{1}{2}\\r_2-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-2&2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-r_2\\r_4-r_2}}{\overset{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$.

因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$, 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$, 所以向量组 $\boldsymbol{A}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示.

6. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

证明:向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

证明　　方法 1

设存在一组常数k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$

可得　$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+2k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$

因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\k_1+k_2+2k_3=0,\\k_1+2k_2+3k_3=0.\end{cases}$

由于此方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq0$

故由克莱姆法则可知，此方程只有零解 $k_1=k_2=k_3=0.$

因此向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

方法 2

由已知条件，有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$

由于 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=-1\neq0$，故矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$可逆.

由矩阵的秩的性质可知： $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$

又因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

从而$\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$.　故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

7. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1,$$

证明:向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

证明 **方法 1**

设存在一组常数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$

得 $(2k_1 + 3k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (3k_1 + 3k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (2k_2 + 2k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以 $\begin{cases} 2k_1 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + 3k_2 = 0, \\ 2k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$

由于此方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$

故由克莱姆法则可知,此方程只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,

因此向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

方法 2

由已知条件,有 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

由于 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$，因此矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 可逆.

由矩阵的秩的性质可知： $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$

又因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 3$.

从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 3$. 故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

8. 设有向量组 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关?

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?若能,试求出该表示式.

解 (1)记 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$,

则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

因为$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0$, 所以矩阵 A 可逆,故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$.

因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

(2)因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关(向量的个数4大于向量的维数3), 故$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,且表示式唯一.

设
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即
$$x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -5\\ 5\end{pmatrix}.$$

从而有
$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ -x_1+3x_3=-5,\\ x_1+x_2-2x_3=5.\end{cases}$$

对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3 & -5\\ 1 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -3 & 5\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3+2r_2\\ r_2\times(-1)}}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1+3r_3\\ r_2+4r_3}}{\overset{r_3\times\frac{1}{5}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

解得唯一解: $x_1=2,x_2=1,x_3=-1$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

9.已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(k,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,k,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

问: k 取何值时,

(1)向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关?

(2)向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关?

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则其行列式

$$|\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}k & 2 & 1\\ 2 & k & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(k+2)(k-3)$$

由此可知,

(1)当 $k=-2$ 或 $k=3$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;

(2)当 $k\neq-2$ 且 $k\neq3$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

10. 设向量组

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}.$$

(1)当 t 取何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

(2)当 t 取何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?

(3)当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时,将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

解　方法 1

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & t\end{pmatrix}$.

对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & t\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & t-1\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_2}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & t-5\end{pmatrix}$$

则(1)当 $t\neq5$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2)当 $t=5$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<3$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(3)设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2$, 由上面的行最简形矩阵可知: $x_1=-1,x_2=2$.

故 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

方法 2

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & t\end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵,其行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5.$$

则(1)当 $t\neq5$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2)当 $t=5$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<3$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(3)当 $t=5$ 时,设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2$,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换将其化为行最简形矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\underset{r_3-2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由上面的行最简形矩阵有 $x_1=-1,x_2=2$.　故 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,$$

试判定向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性相关性.

解　设存在一组常数 x_1,x_2,x_3,使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0},$$

即　$$x_1(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0},$$

化简可得　$$(2x_1+x_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-x_1+x_2+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,所以

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0,\\-x_1+x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

由于此齐次线性方程组中方程的个数小于未知量的个数,

故此方程组必有非零解.

即存在不全为零的常数 x_1,x_2,x_3,使得 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$,

所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

12. 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)^{\mathrm{T}}$$

的秩和一个最大无关组,并把不在最大无关组中的向量用最大无关组线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2\times(-1)\\ r_1-r_2}}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\times\frac{1}{2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

显然 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<4$, 故此向量组的秩等于 2.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个最大无关组.

由行最简形矩阵可知:

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

13. 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,4,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-6,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-2,2,-9)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,-2,7)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_5=(2,4,4,9)^{\mathrm{T}}$$

的秩和一个最大线性无关组,并把不在最大线性无关组中的向量用最大线性无关组线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$, 则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换, 将其化为行最简形矩阵, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-2r_1\\r_4-3r_1}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\r_3-2r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-4&4&-4&0\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_1-r_2\\r_4+r_3}}{\overset{\substack{r_3\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\r_2\leftrightarrow r_3}}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&1&0\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\underset{r_4\times\frac{1}{3}}{\overset{r_3+3r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_4-r_3\\r_2-r_3}}{\overset{r_3\times\frac{1}{2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3<5$, 故此向量组的秩等于 3.向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个最大无关组.

由行最简形矩阵可知:

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

14. 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,-2,6)^{\mathrm{T}}$$

的秩和它的一个最大线性无关组,并把不在最大线性无关组中的向量用最大线性无关组线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\2&1&3&5\\1&-1&3&-2\\3&1&5&6\end{pmatrix}$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\2&1&3&5\\1&-1&3&-2\\3&1&5&6\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\\0&-2&2&-6\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-2r_2\\r_2\times(-1)}}{\overset{\substack{r_1+r_2\\r_4-r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$, 故此向量组的秩等于 2.

因此此向量组的最大线性无关组含有 2 个向量.

因为两个非零行的非零首元位于第 1, 2 列,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个最大线性无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2.$$

15. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组,并将其余向量用此最大无关组线性表示:

$$(1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix};\qquad (2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5\\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7\end{pmatrix}.$$

解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-3r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 4 & -14 & 8\end{pmatrix}\underset{r_4-2r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1+r_2}{\overset{r_2\times\frac{1}{2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此可知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩等于 2, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2.$$

$$(2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5\\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7\end{pmatrix}.$$

解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5\\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7\end{pmatrix}\underset{r_4-3r_1}{\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-2r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2\\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+r_2}{\overset{\substack{r_4-r_2\\ r_2\div(-2)}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩等于 2,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2.$$

16. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=0,\\x_1+x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

的通解及其基础解系.

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2&3\\3&2&-1&2\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_3\\ r_2-3r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&-1&-4&5\\0&-1&-4&5\end{pmatrix}\underset{r_2\times(-1)}{\overset{\substack{r_3-r_2\\ r_1+r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&4&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<4$,故方程组有无穷多组解.

由此行最简形矩阵,可得此方程组的同解方程组为:

$$\begin{cases}x_1=3x_3-4x_4,\\x_2=-4x_3+5x_4.\end{cases}$$

取 x_3,x_4 作自由未知量,并令 $x_3=c_1,x_4=c_2\ (c_1,c_2\in\mathbf{R})$,

故此方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

且此齐次线性方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

17.求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+\ x_3\ =0,\\ \ x_1-2x_2+4x_3=0,\\ 3x_1+8x_2-2x_3=0,\\ 4x_1-\ x_2+9x_3=0\end{cases}$$

的通解及其基础解系.

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-2&4\\3&8&-2\\4&-1&9\end{pmatrix}\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_4-2r_2}}{\underset{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&7&-7\\0&14&-14\\0&-7&7\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-2r_2\\ r_4+r_2}}{\underset{\substack{r_2\times\frac{1}{7}\\ r_1+2r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<3$, 故方程组有无穷多组解.

由此行最简形矩阵,可得此方程组的同解方程组为:

$$\begin{cases}x_1=-2x_3,\\ x_2=\ \ \ \ x_3.\end{cases}$$

选 x_3 作自由未知量,令 $x_3=c(c\in\mathbf{R})$, 故此方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

且此齐次线性方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

18.设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$, 证明:

(1)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(2)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$.

证明 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$.

(1)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量 $\boldsymbol{b}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$, 可知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,

所以 $\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{0}\ (j=1,2,\cdots,n)$,故矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\boldsymbol{O}$.

(2)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$.

已知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$, 由(1)的结论可知,必有 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$,故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$.

19. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有两个解向量,求 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解 因为基础解系中所含向量的个数为 $4-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换,将其化为行阶梯形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}\underset{r_3+(2-t)r_2}{\overset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&0&-(t-1)^2&-(t-1)^2\end{pmatrix}$$

因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $t=1$. 为了求出方程组 $Ax=0$ 的通解,进一步将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵,有

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此行最简形矩阵,可得此方程组的同解方程组为:

$$\begin{cases}x_1=x_3,\\x_2=-x_3-x_4,\end{cases}$$

取 x_3,x_4 作自由未知量,令 $x_3=c_1,x_4=c_2\ (c_1,c_2\in\mathbf{R})$,

故此方程组的通解为:

$$\begin{cases}x_1=x_3,\\x_2=-x_3-x_4,\\x_3=x_3,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

方程组的通解的向量形式为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20.求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$ 的通解,并求出其对应齐次线性方程组的基础解系.

解 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & -3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \underset{r_4-5r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -8 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1+r_2 \\ r_2\times(-1)}}{\overset{\substack{r_3+r_2 \\ r_4-r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_1+r_3 \\ r_2-2r_3}}{\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_4 \\ r_3\times(-\frac{1}{6})}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}) = 3 < 5$,故方程组有无穷多组解.

由此行最简形矩阵,可得与原方程组同解的线性方程组为:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 5x_5 - 16, \\ x_2 = -2x_4 - 6x_5 + 23, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

取 x_4, x_5 作自由未知量,令 $x_4 = c_1, x_5 = c_2\ (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$,故此方程组的通解为:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 + 5x_5 - 16, \\ x_2 = -2x_4 - 6x_5 + 23, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = x_5. \end{cases}$$

方程组的通解的向量形式为:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+5c_2-16\\-2c_1-6c_2+23\\0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

且对应齐次线性方程组的基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$

21. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$,

(1)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(2)当 a 取何值时,方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多组解?并在有无穷多组解时求其通解.

解

(1)将线性方程组的系数行列式按照第一列展开,有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(2)若此方程组有无穷多组解,则 $|\boldsymbol{A}|=0$. 此时 $a=1$ 或 $a=-1$.

此方程组的增广矩阵为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时,对增广矩阵施行初等行变换,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\underset{r_4-r_3}{\overset{\substack{r_4-r_1\\r_4+r_2}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3, \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=4$, 方程组无解,故舍去 $a=1$.

当 $a=-1$ 时,对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 施行初等行变换,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}\overset{\substack{r_4+r_1\\r_4+r_2}}{\underset{r_4+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_3}{\underset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3<4$, 故此方程组有无穷多组解.

与原方程组同解的线性方程组为: $\begin{cases}x_1=x_4,\\x_2=x_4-1,\\x_3=x_4.\end{cases}$

取 x_4 作自由未知量,并令 $x_4=c(c\in\mathbf{R})$, 故此方程组的通解为:

$$\begin{cases}x_1=c,\\x_2=c-1,\\x_3=c,\\x_4=c.\end{cases}\text{即}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

22. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$$

与线性方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

解 为表述方便,将线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 记作①,线性方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 记作②.

方法 1 初等行变换法

线性方程组①与线性方程②的公共解就是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3\ =0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4\,x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+\ x_3\ =a-1 \end{cases} ③$$

的解.

对方程组③的增广矩阵施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4-r_2}{\overset{r_3-3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \underset{r_4+(a-2)r_3}{\overset{\substack{r_3\leftrightarrow r_4\\ r_2+r_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$

因为方程组③有解,所以 $(a-1)(a-2)=0$, 故 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时, 增广矩阵 $\boldsymbol{B}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

取 x_3 作自由未知量,并令 $x_3=c\ (c\in\mathbf{R})$, 故线性方程组①与线性方程②的公共解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $a=2$ 时,增广矩阵 $\boldsymbol{B}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3\times(-1)}{\overset{r_1+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

因此线性方程组①与线性方程②的公共解为: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

方法 2　　行列式法

线性方程组①的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2),$$

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时,线性方程组①只有零解,但 $x = \left(0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$ 不是线性方程②的解.

当 $a = 1$ 时,对线性方程组①的系数矩阵施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_2 - r_1}{\overset{r_3 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_2}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故线性方程组①的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .(c \in \mathbf{R})$$

将此解带入线性方程②,可知 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .(c \in \mathbf{R})$ 也是方程②的解.

所以线性方程组①与线性方程②的公共解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .(c \in \mathbf{R})$$

当 $a = 2$ 时,对线性方程组①的系数矩阵施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{r_2 - r_1}{\overset{r_3 - r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1 - r_2}{\overset{r_3 - 2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故线性方程组①的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .(c \in \mathbf{R})$$

将此解带入线性方程②,可知 $c = -1$.

所以线性方程组①和线性方程②的公共解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

23. 已知平面上 3 条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0,$$

证明:这 3 条直线交于一点的充要条件是: $a+b+c=0$.

证明　必要性

设 3 条直线 l_1, l_2, l_3 交于一点, 则线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \qquad (*)$$

有唯一解.

故系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$ 的秩均为 2,

则 $|\boldsymbol{B}|=0$.

由于

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0,$$

因为 l_1, l_2, l_3 是 3 条不同的直线,所以 a,b,c 中至少有两数不等.

从而 $$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0.$$

故 $$a+b+c=0.$$

充分性　由于 $a+b+c=0$, 则从必要性的证明可知: $|\boldsymbol{B}|=0$.

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})<3$.

又因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=2[a(-a-b)-b^2]=-2(a^2+ab+b^2)$

$$=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$,于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$,从而线性方程组 $(*)$ 有唯一解.

即 3 条直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

24. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,证明:

(1) $\eta^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\eta^*,\eta^*+\boldsymbol{\xi}_1,\eta^*+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\eta^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

证明 (1)用反证法证明. 假设 $\eta^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关.

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,

故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

由于 $\eta^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关,则存在一组常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$,使得

$$\eta^*=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}.$$

进而有

$$\boldsymbol{A\eta}^*=\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\right)=k_1\boldsymbol{A\xi}_1+k_2\boldsymbol{A\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

这与 $\boldsymbol{A\eta}^*=\boldsymbol{b}$ 矛盾, 故假设不成立.

因此 $\eta^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

(2)设向量组 $R:\eta^*,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$; $S:\eta^*,\eta^*+\boldsymbol{\xi}_1,\eta^*+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\eta^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$,

因为向量组 R,S 可以互相线性表示,所以向量组 R,S 等价,其秩相等.

由于向量组 R 的秩为 $n-r+1$,因而 S 的秩为 $n-r+1$.

故向量组 S 线性无关.

25. 已知 $\mathbf{R}^3$ 有两个基

$$\mathrm{I}:\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{II}: \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}9\\24\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}8\\22\\-2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}12\\28\\4\end{pmatrix},$$

(1)求基 I 到基 II 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2)若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 I 中的坐标为 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 求在 $\boldsymbol{\alpha}$ 基 II 中的坐标.

解 (1)设由基 I 到基 II 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$$

两边左乘 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$ 得:

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}9&8&12\\24&22&28\\-1&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\4&4&4\end{pmatrix}.$$

(2) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 I 中的坐标为 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 II 中的坐标为 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$, 则由坐标变换公式可知: 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 II 中的坐标为

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\4&4&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}.$$

故向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 II 中的坐标为 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$.

26. 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4=(2,-3,7)^{\mathrm{T}},$$

证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,并求向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中的坐标.

证明 方法 1

因为 $\mathbf{R}^3$ 是 3 维空间,所以 $\mathbf{R}^3$ 中的任何 3 个线性无关的向量都可以作为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施以初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\-1&2&0&-3\\1&0&3&7\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&3&1&-1\\0&-1&2&5\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\times(-1)}{\overset{\substack{r_1+r_3\\ r_2+3r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&0&7&14\\0&1&-2&-5\end{pmatrix}\underset{r_3\times\frac{1}{7}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&1&-2&-5\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_2+2r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_4=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, 所以向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中的坐标为:

$(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

方法 2

因为 $\mathbf{R}^3$ 是 3 维空间,所以 $\mathbf{R}^3$ 中的任何 3 个线性无关的向量都可以作为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.下面证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

$$\because |\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{vmatrix}=7\neq 0,$$

$\therefore \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

再解线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$, 对其增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\-1&2&0&-3\\1&0&3&7\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&3&1&-1\\0&-1&2&5\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3\times(-1)}{\overset{\substack{r_1+r_3\\ r_2+3r_3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&0&7&14\\0&1&-2&-5\end{pmatrix}\underset{r_3\times\frac{1}{7}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&1&-2&-5\\0&0&1&2\end{pmatrix}\underset{r_2+2r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

得此方程组的唯一解为: $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

故向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中的坐标为 $(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.